

**Textos para
Discussão**

180

Janeiro
de 2009



**COMPARAÇÃO DE CARTEIRAS OTIMIZADAS
SEGUNDO O CRITÉRIO MÉDIA-VARIÂNCIA
FORMADAS ATRAVÉS DE ESTIMATIVAS ROBUSTAS
DE RISCO E RETORNO**

PEDRO L. VALLS PEREIRA

Os artigos dos *Textos para Discussão da Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas* são de inteira responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente a opinião da FGV-EESP. É permitida a reprodução total ou parcial dos artigos, desde que creditada a fonte.

Escola de Economia de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas FGV-EESP
www.fgvsp.br/economia

COMPARAÇÃO DE CARTEIRAS OTIMIZADAS SEGUNDO O CRITÉRIO MÉDIA-VARIÂNCIA FORMADAS ATRAVÉS DE ESTIMATIVAS ROBUSTAS DE RISCO E RETORNO

José Eduardo Freire Damião (Itaú-BBA)

Pedro L. Valls Pereira (EESP-FGV)

Resumo

Este trabalho examinou as características de carteiras compostas por ações e otimizadas segundo o critério de média-variância e formadas através de estimativas robustas de risco e retorno. A motivação para isto é a distribuição típica de ativos financeiros (que apresenta *outliers* e mais curtose que a distribuição normal). Para comparação entre as carteiras, foram consideradas suas propriedades: estabilidade, variabilidade e os índices de Sharpe obtidos pelas mesmas. O resultado geral mostra que estas carteiras obtidas através de estimativas robustas de risco e retorno apresentam melhoras em sua estabilidade e variabilidade, no entanto, esta melhora é insuficiente para diferenciar os índices de Sharpe alcançados pelas mesmas das carteiras obtidas através de método de máxima verossimilhança para estimativas de risco e retorno.

Palavras-chave: Teoria Moderna de Carteira, *Outliers*, Estatística Robusta.

Abstract

This paper investigated the properties of equity portfolios under mean-variance framework and built on statistically robust estimates of risk and return. The motivation for this approach is that financial data contains more outliers and fatter tails than that predicted from a normal distribution. Portfolio stability properties and Sharpe ratio of returns were used to compare different portfolios that came out from the classical (where risk and return were estimated by the maximum likelihood estimator) and robust estimates of risk and return. Robust portfolios

are more stable than the classical ones but their Sharpe ratio of returns is no different from their classical counter-part.

Keywords: Modern Portfolio Theory, Outliers, Robust Statistic.

1. Introdução

Com o surgimento da Teoria Moderna de Carteira, a partir do trabalho de MARKOWITZ (1952), a análise de carteiras passou a ser guiada pela relação de risco e retorno proporcionado pelas mesmas.

Em seu trabalho, Markowitz demonstra para casos particulares que o retorno de uma carteira é a média, ponderada pelas quantidades dos ativos da carteira, dos retornos dos ativos individuais, porém, a variância da carteira, e, portanto seu risco, é diferente da média das variâncias destes ativos individuais devido aos efeitos da diversificação. Mais precisamente, a variância da carteira é dependente das covariâncias dos ativos desta carteira. Com isto, pode-se definir a fronteira eficiente de alocação de recursos de uma carteira, na qual o retorno esperado desta carteira seja maximizado dado uma variância, ou que a variância desta carteira seja minimizada, dado um retorno esperado.

O trabalho de Markowitz pressupõe que os retornos futuros (ou esperados) e suas variâncias e covariâncias sejam conhecidos para que o procedimento de otimização da carteira seja adotado. Um método bastante difundido de estimação destes parâmetros (retornos futuros e suas variâncias e covariâncias) é através da inferência dos mesmos a partir de uma ferramenta estatística tendo-se os dados observados no passado. Em geral, o retorno futuro, a variância para dado ativo e suas covariâncias em relação aos retornos de outros ativos são estimados a partir dos dados passados da amostra (média, variância e covariância passadas).

Por outro lado, a análise de carteiras com base somente no critério de média e variância faz sentido aos investidores quando os mesmos possuem função de utilidade quadrática ou os retornos destes ativos são normalmente distribuídos (DANTHINE e DONALDSON, 2005). No entanto, a função de utilidade quadrática não é uma função de características desejáveis para a representação da função de utilidade de investidores, pois apresenta decrescimento com

o acúmulo do bem a partir do ponto de inflexão, o que nos obriga a restringi-la à parte de utilidade marginal positiva, e o coeficiente de aversão ao risco nesta função é crescente¹.

É de conhecimento que os retornos de ações nem sempre seguem uma distribuição normal, dado que suas distribuições têm caudas mais pesadas que a normal (curtose) e *outliers* que contaminam a amostra (KON, 1984 e, mais especificamente em mercados emergentes, BEKAERT e HARVEY, 1997). *Outliers* são dados da amostra que estão distantes da massa dos demais pontos da mesma e não são previsíveis, ou apresentam baixa probabilidade de surgimento, para os modelos adotados para a distribuição dos pontos desta amostra.

Na literatura estatística, a solução para o problema de risco de especificação correta do modelo é chamado de estatística robusta, pois esta teoria (estatística robusta) é voltada para a construção de procedimentos estatísticos que são estáveis mesmo quando o modelo subjacente não é perfeitamente satisfatório para os dados disponíveis (HAMPEL et. al., 1986). Seja devido a problemas de especificação do modelo ou problemas de presença de *outliers* na amostra, a estatística robusta é uma ferramenta para o manejo destes dados.

No Brasil, a utilização de ferramentas da estatística robusta para a estimação de parâmetros para a formação de carteiras já teve suas vantagens demonstradas frente aos métodos clássicos de estimação com relação a amostras contaminadas artificialmente com *outliers* (REYNA et. al., 2005).

O objeto de estudo deste trabalho é a aplicação de métodos estatísticos robustos para a previsão de retornos futuros e suas covariâncias para a construção de carteiras eficientes segundo o critério de média e variância, e, a comparação dos resultados obtidos com estas carteiras formadas a partir deste procedimento com carteiras formadas seguindo os métodos clássicos de estimação de parâmetros para dados de retornos de ações de certo período.

¹ Se a função de utilidade é quadrática, pode ser escrita da seguinte forma: $U(\mu) = a + b\mu + c\mu^2$, sendo μ a taxa de retorno da carteira. Neste caso, para que seja estritamente côncava, deve-se ter $b > 0$ e $c < 0$. Para que se assegure utilidade marginal positiva $\mu < -\frac{b}{2ac}$. Adicionalmente, o coeficiente de aversão ao risco absoluto é

expresso por $R_A(\mu) = \frac{-U''(\mu)}{U'(\mu)} = \frac{-2c}{b + 2c\mu}$, logo, $R'_A(\mu) = \frac{4c^2}{(b + 2c\mu)^2} > 0$.

Na parte 2 são apresentados: a fundamentação teórica para a construção das carteiras, os conceitos de estatística robusta que permeiam o estudo e uma breve descrição dos estimadores utilizados. Na parte 3 segue-se com a descrição dos dados utilizados para estudo. Na parte 4, os procedimentos e a metodologia de avaliação das carteiras encontradas são descritos. Na parte 5, os resultados encontrados são dispostos e, finalmente, na parte 6, as conclusões do estudo são apresentadas.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Teoria Moderna de Carteira

O procedimento adotado neste trabalho para a formação de carteiras é de minimização do risco (quantificado pela variância da carteira) para dado retorno futuro (DANTHINE e DONALDSON, 2005).

Matematicamente, este problema de minimização pode ser formalizado da seguinte maneira:

Dada a existência de n ativos com risco, seja:

μ_{alvo} : o retorno futuro esperado para a carteira;

w : o vetor de $n \times 1$ posições referente aos pesos de cada ativo individualmente na carteira (w_i representará um peso para o i -ésimo ativo individual da carteira);

μ : o vetor de $n \times 1$ posições referente ao retorno futuro de cada um destes ativos (μ_i representará um retorno futuro para o i -ésimo ativo individual da carteira);

Σ : a matriz de covariâncias destes ativos.

Então, o problema da escolha da carteira é o seguinte:

$$\min w^T \Sigma w$$

sujeito a: $\mu_{alvo} = \mu^T w$, e

$$\sum w_i = 1.$$

Neste processo, estamos interessados em minimizar o risco da carteira (quantificado por sua variância) para certo retorno esperado da carteira. Percebe-se então que a solução do problema acima é dependente das estimativas dos parâmetros μ e Σ para os ativos em estudo.

2.2. Conceitos Básicos de Estatística Robusta

A estatística robusta é uma generalização da estatística clássica que leva em consideração a possibilidade de especificações incorretas do modelo e da distribuição dos dados em estudo. Esta teoria e seus resultados são válidos dentro do modelo especificado e também nas proximidades deste modelo, neste caso, por exemplo, quando a amostra em estudo está contaminada com a presença de *outliers*.

Em nosso estudo, estamos interessados em estimadores robustos. Pode-se definir a distribuição G abaixo a partir de uma combinação de duas distribuições (F e W) da forma como segue:

$$G = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon W, \text{ sendo } \varepsilon \in [0,1].$$

A distribuição G pode ser considerada uma distribuição mista entre a distribuição F e uma contaminação dada pela distribuição W . Diz-se que um estimador é robusto se permanece estável no conjunto de distribuições G formadas a partir de F .

2.2.1. Função Influência

Um caso particular da função G acima ocorre quando Δ_w é uma distribuição na qual o valor w ocorre com probabilidade 1. Logo, se Y possui a distribuição Δ_w , então $P(Y \leq y) = 0$ se $y < w$ e a média de Y é $E(Y) = w$. Portanto, a distribuição resultante é dada por:

$$G_{w,\varepsilon} = (1 - \varepsilon)F + \varepsilon\Delta_w.$$

O interesse em definir a função $G_{w,\varepsilon}$ é o de observar como o valor w afeta o valor de uma função ou estimador da distribuição F quando w ocorre com probabilidade ε .

Quando ε é suficientemente pequeno, pode-se notar que as distribuições $G_{w,\varepsilon}$ e F são bastante semelhantes, conforme o teste de distância de Kolmogorov. Em particular, para cada ponto y de ambas as distribuições, temos que:

$$|G_{w,\varepsilon}(y) - F(y)| = |\varepsilon[F(y) - \Delta_w(y)]|.$$

Como $G_{w,\varepsilon}$ e F são distribuições, temos que $|G_{w,\varepsilon}(y) - F(y)| \leq 1$. Por consequência, a distancia de Kolmogorov entre $G_{w,\varepsilon}$ e F é, no máximo, ε .

A influência relativa do valor w que ocorre com probabilidade ε em uma função $T(F)$ é dada por:

$$\frac{T(G_{w,\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon}.$$

E a Função Influência sobre T em F é definida pela diferença acima, tomada quando ε tende a zero:

$$IF(w) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{T(G_{w,\varepsilon}) - T(F)}{\varepsilon}.$$

A Função Influência é a relativa influência de w em alguma medida da função F ($T(F)$) quando a contaminação por w , ou seja, a probabilidade de observação de w , tende a zero.

A função $T(F)$ é dita infinitesimalmente robusta quando a $IF(w)$ é limitada.

2.3. Função Influência para o Estimador da Média e da Matriz de Covariâncias

Para obtermos a Função Influência para o estimador da média de uma distribuição qualquer, tomaremos $T(F) = E(X)$. Desta forma, se F possui média μ , então $G_{w,\varepsilon}$ possuirá média $(1 - \varepsilon)\mu + \varepsilon w$, e a diferença $T(G_{w,\varepsilon}) - T(F)$ será igual a $\varepsilon(w - \mu)$.

Com isto, a Função Influência da média de uma distribuição é: $IF(w) = w - \mu$.

Pode-se mostrar que a Função Influência para o estimador da matriz de covariâncias de um conjunto de dados tem a seguinte forma:

$$IF(w) = -\Sigma + (w_t - \mu)(w_t - \mu)'$$

Nota-se que ambas as funções influência dos estimadores da média de uma distribuição e da matriz de covariâncias não são infinitesimalmente robustas, ou seja, não são limitadas, pois para valores extremos de w ambas podem ser indefinidamente grandes.

2.4. Estimadores Robustos da Média e da Matriz de Covariâncias

Uma alternativa para a estimativa de parâmetros com maior representação da massa dos dados de certa amostra, ou seja, com maior representatividade entre os indivíduos da amostra, é através da estimação robusta destes parâmetros.

Em especial, estamos interessados nas estimativas robustas dos parâmetros média e matriz de covariâncias de retornos de ativos financeiros para que, com estas estimativas sejam formadas carteiras otimizadas segundo o critério de média e variância que proporcionem vantagens sobre as demais carteiras otimizadas segundo este mesmo critério.

2.4.1. Estimação Robusta da Média

Um estimador robusto para o parâmetro de posição, do qual a média é um caso particular, é um estimador μ_m que satisfaz a equação abaixo:

$$E[\psi(X - \mu_m)] = 0,$$

na qual ψ representa a derivada de uma medida de distanciamento entre X e μ_m .

E a Função Influência para estimadores deste tipo é:

$$IF_m(x) = \frac{\psi(x - \mu_m)}{E[\psi'(x - \mu_m)]},$$

sendo $\psi'(x - \mu_m)$ a derivada da função ψ (ou seja, a Função Influência é a função ψ escalonada pela sua derivada $\psi'(x - \mu_m)$).

A função apresentada por Tukey (Função de Duplo Peso) para a solução do problema acima é:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x(c - x^2)^2 && \text{se } |x| < c, \text{ e} \\ \psi(x) &= 0 && \text{se } |x| \geq c, \text{ com } c \text{ igual à } 1. \end{aligned}$$

Note que para este caso a Função Influência do estimador é limitada, pois a própria função ψ assim o é. Na prática isto significa que valores extremos desta distribuição terão pouca ou nenhuma influência na estimação do parâmetro desejado μ_m .

2.4.2. Estimação Robusta da Matriz de Covariâncias

Para encontrar um estimador robusto para a matriz de covariâncias, pode-se proceder da forma apresentada abaixo:

Seja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ um conjunto de dados em \mathbb{R}^n . Um estimador da classe S de locação e forma multivariados é definido pelo o vetor t e a matrix simétrica positiva definida C que minimizam o determinante de C sujeito à:

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{[(x_i - t)^T C^{-1} (x_i - t)]^{\frac{1}{2}}}{c} \right) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \rho \left(\frac{d_i}{c} \right) = b_0,$$

sendo: $d_i = [(x_i - t)^T C^{-1} (x_i - t)]^{\frac{1}{2}}$ e ρ uma função não decrescente em $[0, \infty)$.

A função ρ é escolhida de forma a ser uma versão escalonada de uma função base tal qual a função de duplo peso, que alcança o seu máximo 1 em c_0 . A constante b_0 é escolhida como $b_0 = r\rho(c_0)$ para a ruptura (*breakdown*) r . A constante c é escolhida de forma que a estimativa \hat{C} de C é consistente sob normalidade multivariada, de tal forma que $E(\rho(d/c)) = b_0$, sendo a média calculada sob uma distribuição chi-quadrado com n graus de liberdade.

Seja $\tilde{d}_i = \frac{d_i}{c}$. Uma estimativa da classe S é também uma solução (\hat{t}, \hat{C}) de uma iteração de média e covariância ponderadas.

$$\hat{t}_i^{(j)} = \frac{\sum w(\tilde{d}_i^{(j)}) x_i}{\sum w(\tilde{d}_i^{(j)})}$$

$$\hat{C}_i^{(j)} = \frac{\sum w(\tilde{d}_i^{(j)}) x_i (x_i - t^j) (x_i - t^j)^T}{\sum \vartheta(\tilde{d}_i^{(j)})}$$

sendo

$$w(\tilde{d}) = \psi(\tilde{d}) / \tilde{d}$$

$$\psi(\tilde{d}) = \rho'(\tilde{d})$$

$$\vartheta(\tilde{d}) = \tilde{d} \psi(\tilde{d}).$$

Note que o peso zero é dado quando $\tilde{d}_i > c$.

A iteração acima pode ser vista como um processo de um estimador da classe M, que se inicia com uma estimativa robusta (\hat{t}^0, \hat{C}^0) .

2.4.2.4. Função de Duplo Peso Transladada

Como peso zero é dado aos pontos com distância maior que c , pode-se esperar que pontos que estão a uma grande distância da massa dos dados receberão peso zero. Isto é verdade para o caso de uma dimensão, em que o estimador de duplo peso da classe S com ruptura igual a 0,5 atribui peso zero para qualquer ponto x_i tal que \tilde{d}_i maior que 1,55 vezes a estimativa do desvio padrão. No entanto, este comportamento muda quando a dimensão dos dados (n) aumenta. Para o caso de 20 dimensões, um ponto deve estar a pelo menos uma distância de $\sqrt{94,5}$ da média para receber peso zero neste estimador (ROCKE, 1996). Sob normalidade, tal distância ocorre com probabilidade da ordem de 10^{-11} .

Pontos muito afastados do centro da massa dos dados são claramente *outliers*, mas ainda assim recebem peso positivo na análise.

Este problema é contornado utilizando-se uma função de peso que é essencialmente a mesma função duplo peso, exceto que esta foi transladada (novamente: ROCKE, 1996). A função duplo peso transladada é definida por uma classe de dois parâmetros da função ρ :

$$w_i(d; c, m) = \begin{cases} 1 & 0 \leq d < M \\ (1 - ((d - M)/c)^2)^2 & M \leq d < M + c \\ 0 & d > M + c \end{cases}$$

$$\psi_i(d; c, m) = \begin{cases} d & 0 \leq d < M \\ d(1 - ((d - M)/c)^2)^2 & M \leq d < M + c \\ 0 & d > M + c \end{cases}$$

$$\rho_t(d; c, m) = \begin{cases} d^2 / 2 & 0 \leq d < M \\ f(d; c, M) & M \leq d < M + c \\ \frac{M}{2} + c((5c + 16M)/30) & d > M + c \end{cases}$$

sendo

$$\begin{aligned} f(d; c, M) = & \frac{M^2}{2} - \frac{M^2(M^4 - 5M^2c^2 + 15c^4)}{30c^4} + d^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{M^4}{(2c^4)} - \frac{M^2}{c^2} \right) + d^3 \left(\frac{4M}{3c^2} - \frac{4M^3}{3c^4} \right) + \\ & + d^4 \left(\frac{3M^2}{2c^4} - \frac{1}{2c^2} \right) - \frac{4Md^5}{5c^4} + \frac{d^6}{6c^4} \end{aligned}$$

A idéia desta solução é ser capaz de atribuir peso zero aos *outliers* determinando-se a chance, em grandes amostras, dentro de uma distribuição de referência, de que a um ponto "bom" seja associado peso zero na análise. Isto é, a probabilidade de um ponto "bom" estar além do ponto de rejeição (distância de Mahalanobis exceder c_0), e, portanto, a este ponto ser atribuído peso zero no estimador. A esta chance, dá-se o nome de probabilidade de rejeição assintótica - ARP (*asymptotic rejection probability*).

Os parâmetros c e M da função f são escolhidos de forma a darem o ponto de ruptura (*breakdown point*) e a ARP desejados. Embora a ARP deva ser baixa para que não se perca eficiência no estimador, é útil ser capaz de rejeitar pontos (atribuindo peso zero a estes) que são muito improváveis de ocorrerem dentro do modelo.

O software estatístico S-Plus apresenta em sua biblioteca "*robust*" funções específicas para os estimadores da média e da matriz de covariâncias robustas (SCHERER e MARTIN, 2005) e, por este motivo, foi utilizado como software de suporte ao estudo.

3. Base de Dados

A base de dados deste trabalho são as ações brasileiras negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA) que estão em atividade desde janeiro de 1994 e são ativas até outubro de 2006. Deste conjunto de ações, foram selecionadas as ações que não foram negociadas em, no

máximo, cinquenta dias úteis do período de janeiro de 1998 a outubro de 2006 e que não apresentaram negociação em, no máximo, sete dias úteis consecutivos. Ou seja, o conjunto selecionado de ações possibilita o cálculo do retorno diário das mesmas com os dados históricos da série de preço em, no mínimo, todos os dias úteis de janeiro de 1998 a outubro de 2006 menos cinquenta dias. Para os dias em que a ação não foi negociada, os preços existentes para ação dos dias imediatamente anterior e posterior a esta data foram utilizados para estimativa do valor da ação através de interpolação linear para efeitos do cálculo do retorno da mesma.

Também foi coletada a série histórica da taxa do CDI (Certificado de Depósito Interbancário), no mesmo período mencionado acima, para uso como taxa de juros livre de risco no cálculo de excesso de retorno das ações.

Os dados coletados provém do sistema Economática.

4. Metodologia

Para a comparação entre métodos de estimação de parâmetros para formação de carteiras otimizadas segundo o critério de otimização de Markowitz, utilizamos a seguinte metodologia para a avaliação da estabilidade e performance das carteiras.

4.1. Procedimento de Avaliação

O procedimento de avaliação se utiliza do procedimento de “janela móvel” para a definição das carteiras para comparação.

Primeiramente, são calculados os retornos diários para as ações selecionadas do período de janeiro de 1998 a outubro de 2006 e retorno mensal para as mesmas ações para o período de janeiro de 1997 a outubro de 2006.

Em segundo, escolhem-se os intervalos iniciais para os quais se fazem as estimações dos parâmetros. Estes intervalos T_1 e T_2 , sendo $T_1 < L_1$, quando a estimação de parâmetros é feita

sobre os retornos diários das ações, e $T_2 < L_2$, quando a estimação é feita sobre os retornos mensais das mesmas, serão chamados doravante genericamente de T ; L_1 e L_2 são os números totais de amostras no banco de dados – quantidade de datas para efeitos do cálculo de retornos diários e mensais respectivamente, doravante chamadas genericamente de L . Para o nosso experimento, utilizamos duas “janelas” de estimação: $T_1 = 126$ amostras, a qual corresponde a 126 dias de dados, e, outra de $T_2 = 84$ amostras, a qual corresponde de 84 meses de dados.

Dentro destes intervalos T , as estimativas de média e variâncias de retornos são feitas através dos estimadores de máxima verossimilhança (MLE) para estimação “clássica” dos parâmetros, e, dos estimadores robustos acima apresentados para estimação “robusta” dos parâmetros, os quais servem de entrada para a otimização da carteira. Com isso, duas carteiras diferentes são geradas para este período através das estimações clássica e robusta de parâmetros acima. Chamaremos de “estratégia clássica” o método de otimização de carteiras com base nas estimativas clássicas de média e variância e de “estratégia robusta” o método de otimização de carteiras com base nas estimativas robustas destes parâmetros.

Em terceiro, repete-se o procedimento acima para o período subsequente, incluindo-se o dado correspondente à próxima amostra do banco de dados e excluindo-se o dado da amostra mais antiga, até que o fim do banco de dados seja alcançado. Ao final deste processo, foram geradas $L - T$ carteiras diferentes para cada estratégia. Ao vetor de peso dos ativos de cada carteira será dado o nome w_t^k , em que $t = T, \dots, L - 1$ corresponde a um conjunto de amostras do banco de dados e k refere-se a uma estratégia de formação de carteira.

4.2. Boxplot dos Vetores de Peso

Os boxplots dos vetores de peso mostram graficamente quais estratégias são mais estáveis, no sentido de menor variabilidade dos percentuais de ativos em cada carteira. Ao final da metodologia de janela móvel acima mencionada, para cada estratégia tem-se um conjunto de vetores $w_{j,t}^k$ representantes do peso do ativo j para a estratégia k para a amostra $t = T, \dots, L - 1$. O conjunto de vetores $w_{j,t}^k$ para $j = 1, 2, 3, \dots, n$ compõe o vetor de peso w_t^k da estratégia k . Pode-se mostrar graficamente através dos boxplots destes vetores de peso $w_{j,t}^k$ a

grandeza das variações dos ativos de cada carteira para cada estratégia. Claramente, estratégias mais estáveis deverão ter boxplots relativamente mais compactos (menores), ou com peso menor nas caudas.

4.3. Variação de Carteira (*Turnover*)

Para definição de estabilidade da carteira, seja $w_{j,t}^k$ correspondente ao peso do ativo j no instante t da estratégia k , $w_{j,t+}^k$, o peso do ativo j no instante t da estratégia k , porém, antes do rebalanceamento da carteira, ou seja, igual ao $w_{j,t}^k$ incorporado com a valorização ou desvalorização do ativo j , e, $w_{j,t+1}^k$, o peso desejado do ativo j no instante $t+1$, após o rebalanceamento da carteira. O *turnover* da carteira, ou parâmetro de “variação da carteira”, será definido pela soma dos valores absolutos das trocas dos n ativos nas $L-T-1$ datas de negociação possíveis, normalizado pelo número total de datas de negociação:

$$Turnover = \frac{1}{L-T-1} \sum_{t=T}^{L-1} \sum_{j=1}^n (w_{j,t+1}^k - w_{j,t+}^k)$$

É importante aqui diferenciar a “estabilidade da carteira” de *turnover* ou “variação da carteira”: A “estabilidade da carteira” é dada pela diferença entre os pesos dos ativos da mesma em t e $t+1$ e pode ser acompanhada pelo boxplot dos vetores de peso dos n ativos j em estudo. A “variação da carteira” é percentagem média de riqueza trocada a cada período t , que difere da estabilidade da carteira, pois leva em consideração o crescimento ou diminuição (valorização) da mesma.

4.4. Média, Variância e Índice de Sharpe dos Retornos das Carteiras

Para comparar o desempenho entre as diferentes carteiras foram utilizados os dados de retornos fora da amostra escolhida para estimação de parâmetros e otimização. Ou seja, tendo-se definido o intervalo T ($T < L$) para estimação dos parâmetros e otimização das carteiras e o procedimento de janela móvel descrito em 4.1., pode-se utilizar o vetor de pesos definido para a carteira no instante t e verificar o desempenho da mesma em $t+1$.

Seguindo-se o procedimento de janela móvel, para cada estratégia k são computados os vetores de peso $w_{j,t}^k$ para cada instante $t = T, \dots, L-1$. Simulando-se o retorno da carteira formada em t , que é caracterizada pelo vetor $w_{j,t}^k$, em $t+1$ temos o excesso de retorno em $t+1$: $r_{t+1}^k = w_{j,t}^{kT} r_{t+1}$, sendo r_{t+1} o excesso de retorno sobre a taxa de juros livre de risco. Com a série dos retornos r_t^k , a média, variância e índice de Sharpe dos retornos das carteiras são dados por:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^k &= \frac{1}{L-T} \sum_{t=T}^{L-1} w_{j,t}^{kT} r_{t+1}, \\ (\hat{\sigma}^k)^2 &= \frac{1}{L-T-1} \sum_{t=T}^{L-1} (w_{j,t}^{kT} r_{t+1} - \hat{\mu}^k)^2, \\ \hat{SR}^k &= \frac{\hat{\mu}^k}{\hat{\sigma}^k}.\end{aligned}$$

Para medir a significância estatística da diferença entre os índices de Sharpe para carteiras formadas no mesmo período, com os mesmos dados, utilizamos a abordagem relatada em JOBSON e KORKIE (1981).

5. Resultados

Nas tabelas seguintes, são apresentados os resultados do experimento acima: média, variância, índice de Sharpe dos retornos das carteiras e “turnover” ou “variação da carteira”. São apresentados os p-Valores das comparações dos índices de Sharpe entre as carteiras de estratégias diferentes formadas com os dados de retornos diários e mensais dos ativos. Também são mostrados os gráficos boxplot dos vetores de peso dos ativos nas carteiras.²

Tabela 1 – Comparação entre Carteiras – Retornos Diários

Permitida a venda a descoberto das ações.

Período da Base de Dados	de 02 de janeiro de 1998 a 16 de outubro de 2006
Período da Amostra da Janela Móvel	126 dias úteis
Estratégia	Retorno Médio Acima da Taxa de Juros Livre de Risco (%)

² A ordem dos ativos demonstrados nos gráficos boxplot é a mesma da listagem destes ativos no Apêndice I.

Clássica	0,06310	
Robusta	0,06420	
Estratégia	Matriz de Covariâncias dos Retornos (%)	
	Clássica	Robusta
Clássica	1,91922	1,81271
Robusta	1,81271	1,79450
Estratégia	Turnover das Carteiras	
Clássica	0,27892	
Robusta	0,27422	
p-Valor (teste de comparação dos índices de Sharpe)		0,44633

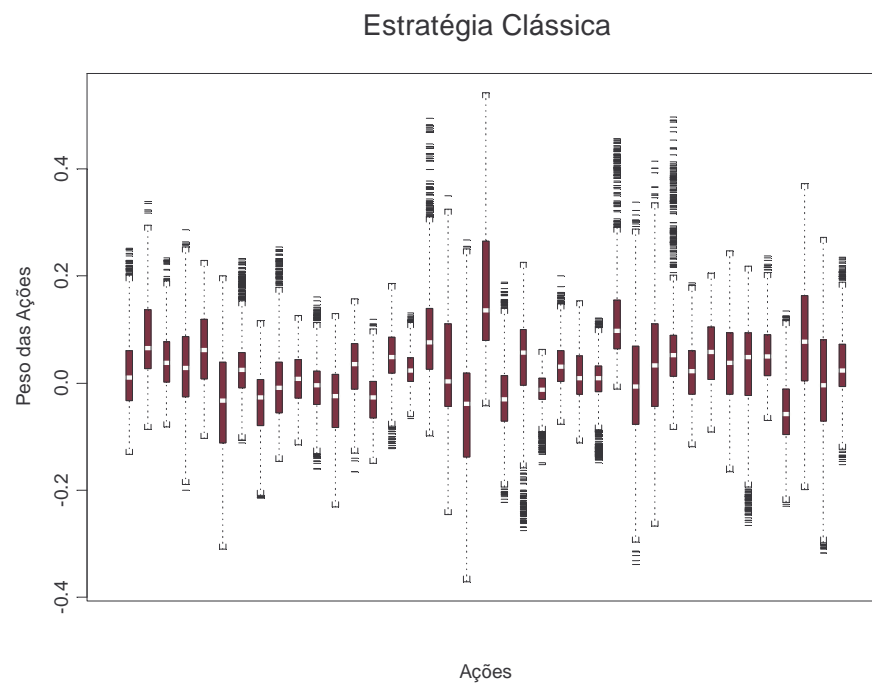


Gráfico 1 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Clássica – Retornos Diários
Permitida a venda a descoberto das ações.

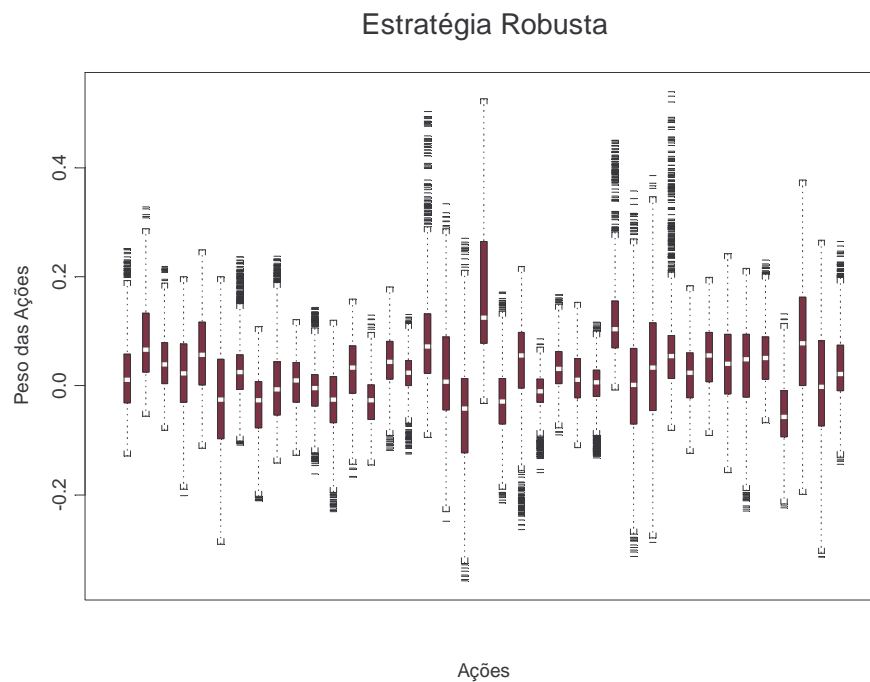


Gráfico 2 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Robusta – Retornos Diários
Permitida a venda a descoberto das ações.

Tabela 2 – Comparação entre Carteiras – Retornos Diários
Não permitida a venda a descoberto das ações.

Período da Base de Dados	de 02 de janeiro de 1998 a 16 de outubro de 2006	
Período da Amostra da Janela Móvel	126 dias úteis	
Estratégia	Retorno Médio Acima da Taxa de Juros Livre de Risco (%)	
Clássica	0,06073	
Robusta	0,05735	
Estratégia	Matriz de Covariâncias dos Retornos (%)	
	Clássica	Robusta
Clássica	1,84425	1,74229
Robusta	1,74229	1,70142
Estratégia	Turnover das Carteiras	
Clássica	0,07413	
Robusta	0,07319	
p-Valor (teste de comparação dos índices de Sharpe)		0,48507

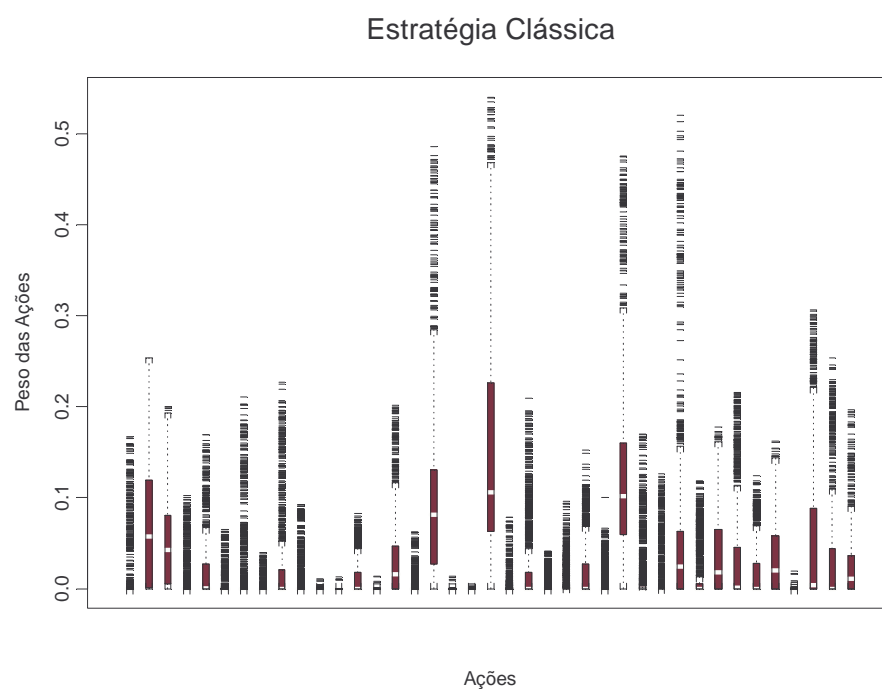


Gráfico 3 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Clássica – Retornos Diários

Não permitida a venda a descoberto das ações.

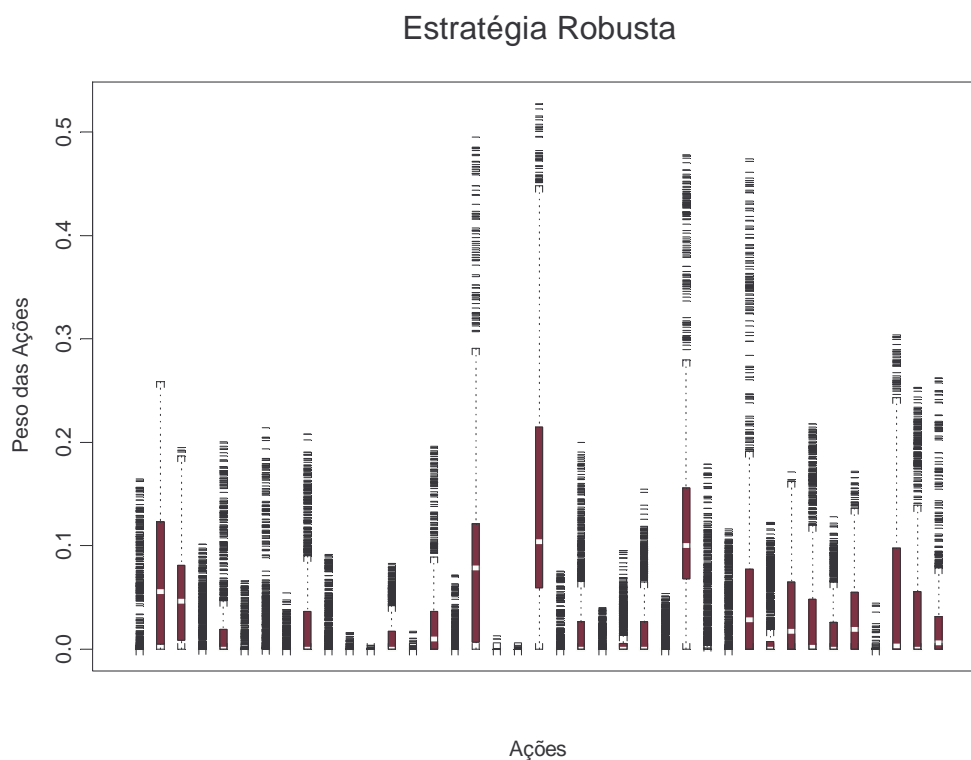


Gráfico 4 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Robusta – Retornos Diários

Não permitida a venda a descoberto das ações.

Tabela 3 – Comparação entre Carteiras – Retornos Mensais

Permitida a venda a descoberto das ações.

Período da Base de Dados	de 02 de maio de 1994 a 2 de outubro de 2006	
Período da Amostra da Janela Móvel	84 meses	
Estratégia	Retorno Médio Acima da Taxa de Juros Livre de Risco (%)	
Clássica	1,52825	
Robusta	1,39779	
Estratégia	Matriz de Covariâncias dos Retornos (%)	
	Clássica	Robusta
Clássica	60,86485	57,54062
Robusta	57,54062	59,98273
Estratégia	Turnover das Carteiras	
Clássica	1,20673	
Robusta	1,14049	
p-Valor (teste de comparação dos índices de Sharpe)		0,504107

Estratégia Clássica

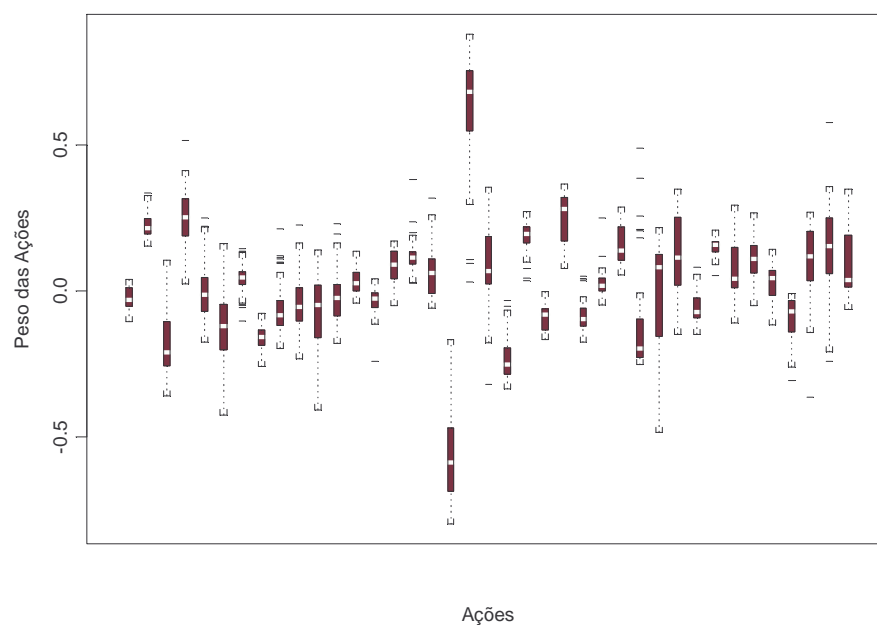


Gráfico 5 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Clássica – Retornos Mensais

Permitida a venda a descoberto das ações.

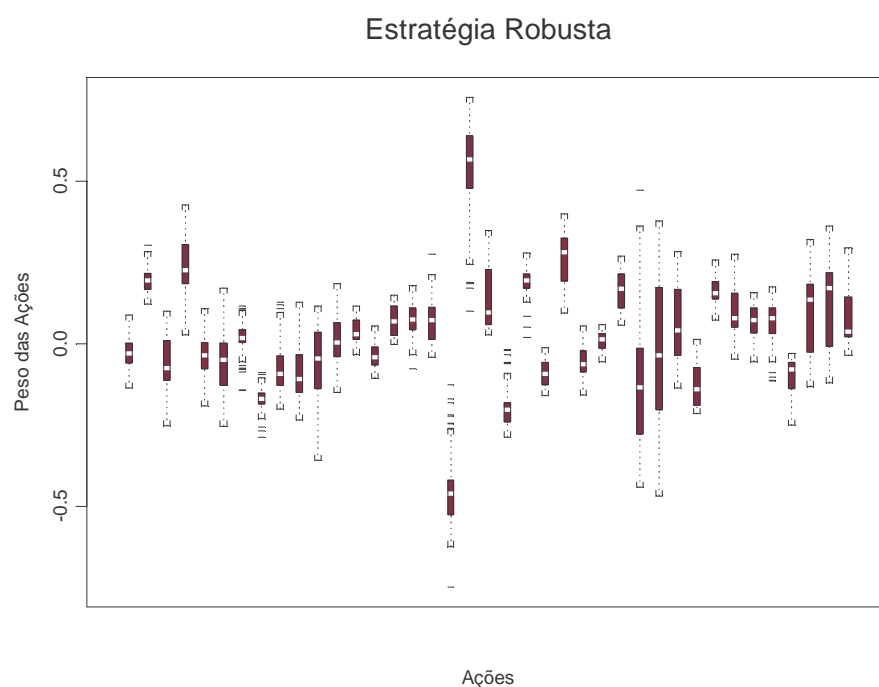


Gráfico 6 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Robusta – Retornos Mensais
Permitida a venda a descoberto das ações.

Tabela 4 – Retornos Mensais – Não permitida a venda a descoberto das ações.

Período da Base de Dados	de 02 de maio de 1994 a 2 de outubro de 2006	
Período da Amostra da Janela Móvel	84 meses	
Estratégia	Retorno Médio Acima da Taxa de Juros Livre de Risco (%)	
Clássica	1,653697	
Robusta	1,549110	
Estratégia	Matriz de Covariâncias dos Retornos (%)	
	Clássica	Robusta
Clássica	40,737779	35,587291
Robusta	35,587291	35,052502
Estratégia	Turnover das Carteiras	
Clássica	0,191832819	
Robusta	0,177354538	
p-Valor (teste de comparação dos índices de Sharpe)	0,4917744	

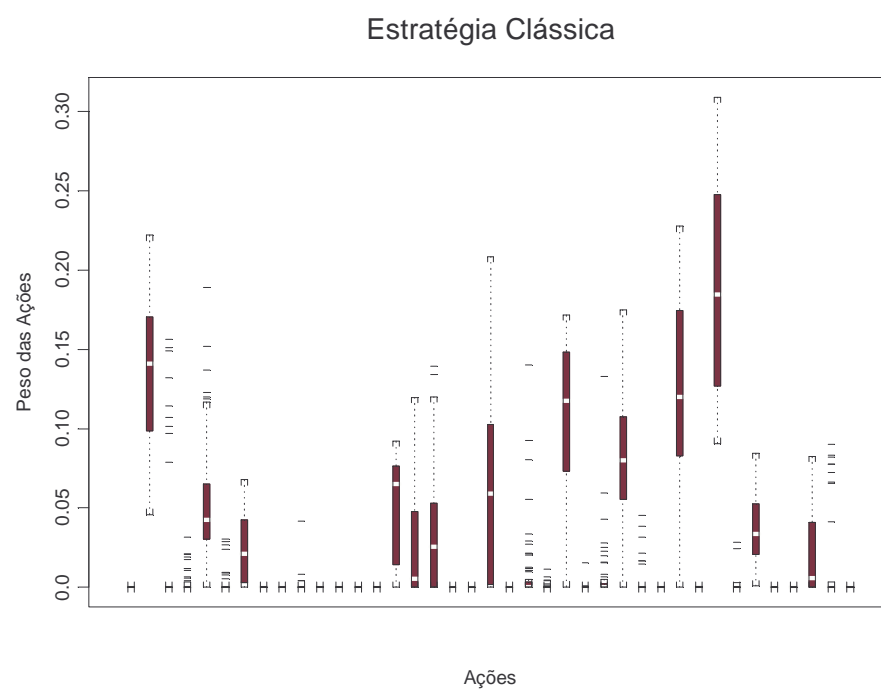


Gráfico 7 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Clássica – Retornos Mensais
 Não permitida a venda a descoberto das ações.

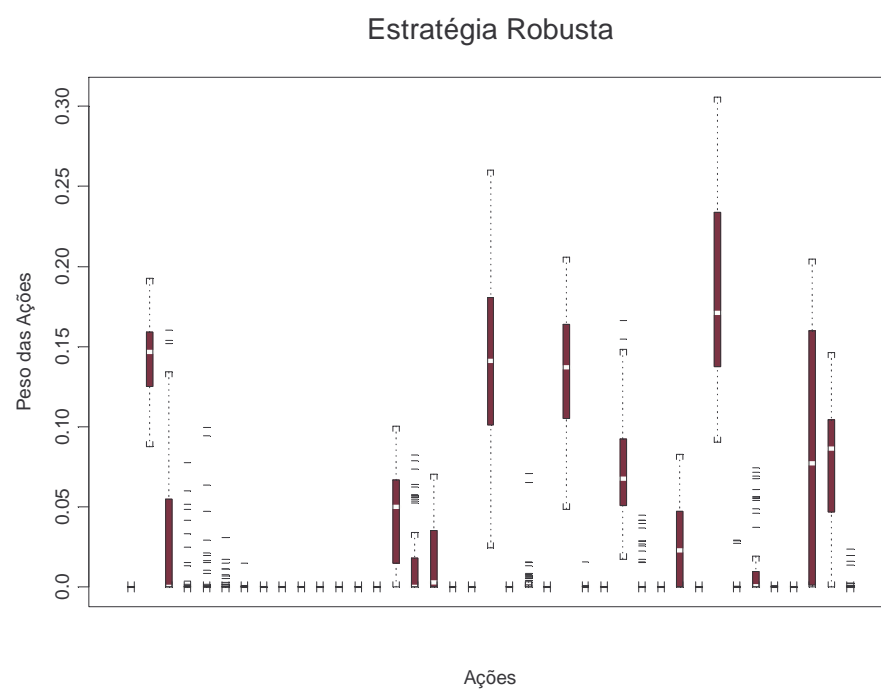


Gráfico 8 – Boxplot dos Vetores de Peso da Estratégia Clássica – Retornos Mensais

Não permitida a venda a descoberto das ações.

Os resultados acima demonstram que a variação da carteira é positivamente afetada quando se usa a estratégia robusta ao invés da estratégia clássica. No entanto, a melhoria proporcionada pela estratégia robusta é quase imperceptível quando se observam os gráficos boxplot dos vetores de peso dos ativos. Nestes gráficos, o intervalo de variação não muda muito, mas a densidade das caudas sim, mostrando uma diminuição dos valores extremos quando empregada a estratégia robusta.

Como exemplificação com maior detalhe das alterações da estabilidade da carteira quando empregada a estratégia robusta, destacamos os gráficos boxplot abaixo dos pesos das ações ARCZ6, ITAU4, CNFB4, GGBR4 e USIM5 ("Ações Seleccionadas") nas carteiras das estratégias clássicas e robustas com o intuito de facilitar a visualização do fenômeno mencionado acima.

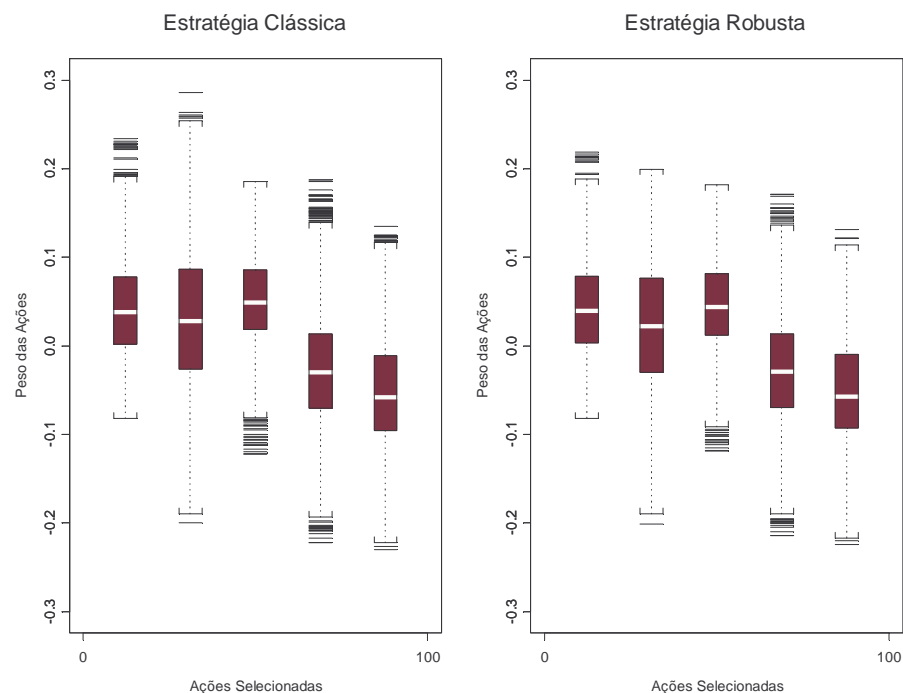
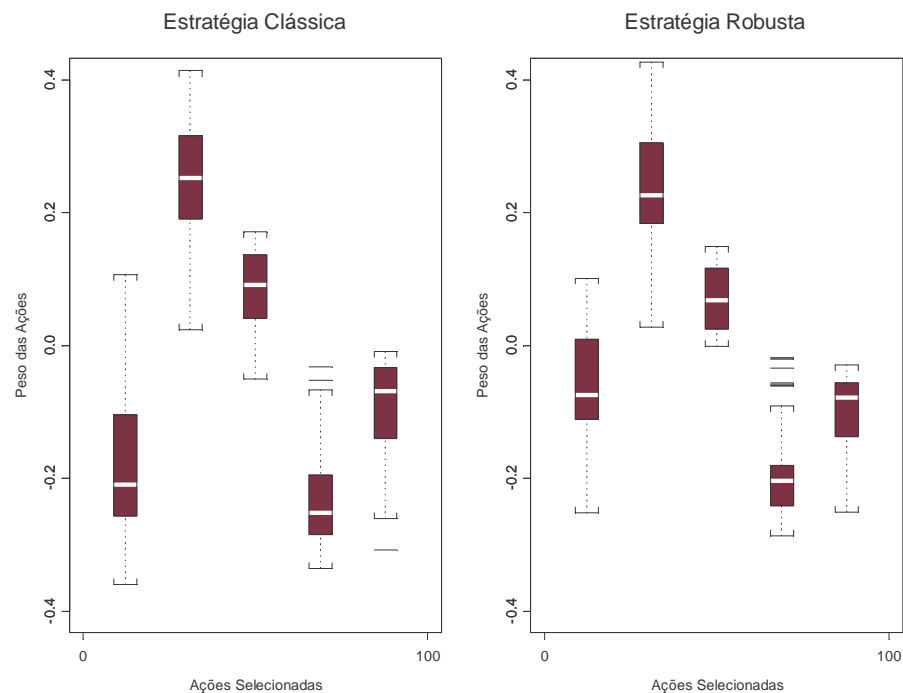


Gráfico 9 – Boxplot dos Vetores de Peso (Ações Seleccionadas) – Retornos Diários
Permitida a venda a descoberto das ações.



Gráfico 10 – Boxplot dos Vetores de Peso (A es Selecionadas) – Retornos Mensais
Permitida a venda a descoberto das a es.

Adicionalmente, os retornos das carteiras parecem ser mais favoráveis à estratégia robusta que   estratégia clássica. Este resultado é mais evidente para os retornos mensais para a estratégia robusta do que para a clássica, uma vez que as amplitudes dos boxplots são menores e as caudas mais leves. Porém, quando comparados os índices de Sharpe produzidos pelas diferentes estratégias, não se pode dizer que há diferença significativa entre estes índices até ao nível de 40%.

6. Conclusão

O presente trabalho buscou uma metodologia de gera o de carteiras eficientes segundo o critério de média-variância na quais as propriedades das carteiras: estabilidade, *turnover* (varia o) e  ndice de Sharpe pudessem ser melhorados, uma vez que a distribui o dos retornos de ativos financeiros nem sempre segue a distribui o normal.

A alternativa utilizada neste sentido foi o emprego de estimadores robustos para a estimação da média dos retornos e matriz de covariâncias, entradas do procedimento de otimização das carteiras.

Como se poderia imaginar: que a estatística robusta preservaria a “essência” das características de risco e retorno dos ativos (REYNA et. al., 2005), percebe-se que as propriedades de estabilidade e variação da carteira são melhoradas com a utilização dos estimadores robustos, no entanto, os resultados acima mostram que o índice de Sharpe medido com os valores de média e variância dos retornos fora da amostra destas carteiras não foi estatisticamente diferente do índice de Sharpe das carteiras formadas a partir das estimativas clássicas de média e variância de retornos dos ativos. Ou seja, o desempenho destas carteiras, tomando-se como medida de desempenho o índice de Sharpe das mesmas, não é estatisticamente diferente entre si.

Referências

BEKAERT, Geert, HARVEY, Campbell R. Emerging Markets Volatility. **Journal of Financial Economics**, v. 43, p. 29-77, 1997.

DANTHINE, Jean-Pierre, DONALDSON, John B. **Intermediate Financial Theory**. 2. ed. Burlington: Elsevier Academic Press, 2005. 377 p.

HAMPEL, F.R. et al. **Robust Statistics: The Approach based on influence functions**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1986. 536 p.

JOBSON, J. D., KORKIE, R. M. Performance Hypothesis Testing with the Sharpe and Treynor Measures. **The Journal of Finance**, v. XXXVI, no. 4. p. 889-908, 1981.

KON, Stanley J. Models of Stock Returns – A Comparison. **The Journal of Finance**, v. 39, no. 1. p. 147-165, 1984.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**. v. 7, no. 1. p. 77-91, 1952.

REYNA, Fernando R.Q. et al. Optimal Portfolio Structuring in Emerging Stock Markets Using Robust Statistics. **Brazilian Review of Econometrics**. Rio de Janeiro, v. 25, p. 139-157, 2005.

ROCKE, David M. Robustness Properties of S-Estimators of Multivariate Location and Shape in High Dimension. **The Annals of Statistics**. v. 24, no. 3, p. 1327-1345, 1996.

SCHERER, B., MARTIN, D. **Introduction to Modern Portfolio Optimization with NuOPT, S-Plus, and S-Bayes**. Nova Iorque: Springer, 2005. 410 p.

Apêndice I – Lista dos Ativos Utilizados no Experimento

Abaixo segue a lista dos ativos utilizados no experimento:

Acesita PN (ACES4)
Ambev PN (AMBV4)
Aracruz PNB (ARCZ6)
Bco Itau Hold Finan PN (ITAU4)
Bradesco ON (BBDC3)
Bradesco PN (BBDC4)
Brasil ON (BBAS3)
Brasil Telecom PN (BRTO4)
Braskem PNA (BRKM5)
Celesc PNB (CLSC6)
Cemig ON (CMIG3)
Cemig PN (CMIG4)
Cesp ON (CESP3)
Cesp PNA (CESP5)
Confab PN (CNFB4)
Copel ON (CPLE3)
Duratex PN (DURA4)
Eletrobras ON (ELET3)
Eletrobras PNB (ELET6)
Fosfertil PN (FFTL4)
Gerdau PN (GGBR4)
Gerdau Met PN (GOAU4)
Inepar Construcoes PN (INEP4)
Ipiranga Pet PN (PTIP4)
Klabin PN (KLBN4)
Light ON (LIGT3)
Magnesita PNA (MAGS5)
Petrobras ON (PETR3)
Petrobras PN (PETR4)
Sadia PN (SDIA4)

Sid Nacional ON (CSNA3)

Souza Cruz ON (CRUZ3)

Telesp ON (TLPP3)

Telesp PN (TLPP4)

Unipar PNB (UNIP6)

Usiminas PNA (USIM5)

Vale Rio Doce ON (VALE3)

Vale Rio Doce PNA (VALE5)

Votorantim C P PN (VCPA4)

Apêndice II – Código do Programa em S-Plus Utilizado no Experimento

Calculadora dos Retornos das Ações:

```
module(nuopt)
library(robust)

#-----
# calcula retorno dos ativos:

m = nrow(Sport)      # estados da natureza
n = ncol(Sport)      # numero de ativos
Smatriz = matrix( ,m,n) # matriz de retornos diarios dos ativos

j = 1
while(j <= n){
  i = 1
  while(i < m){
    Smatriz[i,j] = (Sport[i+1,j]-Sport[i,j]) / Sport[i,j]
    i = i + 1
  }
  j = j + 1
}
Sm1 = 1 + Smatriz

#-----
# calcula taxa livre de risco: CDI:
CDIdia = (1+(fddCDI252/100))^(1/252)
CDIdia = as.matrix(CDIdia)
```

Produce a Carteira da Estratégia Clássica:

```
module(nuopt)
library(robust)

#-----
# Monta a carteira utilizando a Estimacão Classica de Parametros

#-----
# definições:

m = nrow(Sm1)      # estados da natureza
n = ncol(Sm1)      # numero de ativos
```

```

hor = 126 # tamanho da amostra da janela movel

Amostra = matrix( ,hor,n)
peso.carteira = matrix( ,m,n)
retorno = matrix( ,m,1)

#-----
# condições iniciais:

# retorno medio da carteira:
mu.target = 0.01

# condicoes de contorno:
cLO = c(mu.target, 1)
cUP = c(Inf, 1)

# restricoes:
#bLO = rep(0, n)           # nao permite venda a descoberto
bLO = rep(-Inf, n)        # permite venda a descoberto

bUP = rep(1, n)

# -----
# definição dos pesos:

i = hor

while(i < m){

  # define o periodo da amostra - janela movel:
  Amostra = Sml[(i-hor+1):i, 1:n]

  # calcula os pesos da carteira para o periodo amostrado:
  Cov = var(Amostra)          # matriz de variancia e covariancia
  mu = apply(Amostra, 2, mean) # media dos retornos

  # parametros do solver:
  A = rbind(mu, 1)

  # resolucao:
  solution = solveQP (objQ = Cov, , A, cLO, cUP, bLO, bUP,,)

  # guarda os pesos das carteiras no vetor de pesos:
  peso.carteira[i, 1:n] = solution$variable$x$current
}

```

```

# calcula o retorno diario fora da amostra (retorno absoluto):
retorno[i,1] = t(peso.carteira[i, 1:n])%*%Sm1[(i+1), 1:n]

i = i + 1
}

#-----
# calcula o turnover da carteira:

i = hor + 1
inicio = hor
turnover = 0

while(i < m){
  wanterior = peso.carteira[i-1, 1:n]*Sm1[i, 1:n]
  wfinal = peso.carteira[i, 1:n]
  turnover = turnover + sum(abs(wfinal - wanterior))
  i = i + 1
}
turnover = turnover/(m - inicio - 1)

#-----
# calcula o retorno medio da carteira:
media.retorno = sum(retorno[inicio:(m-2), 1])/(m - inicio - 2)

```

Produce a Carteira da Estratégia Robusta:

```

module(nuopt)
library(robust)

#-----
# Monta a carteira utilizando a Estimação Robusta de Parametros

#-----
# definições:

m = nrow(Sm1)          # estados da natureza
n = ncol(Sm1)          # numero de ativos

hor = 126 # tamanho da amostra da janela movel

Amostra = matrix( ,hor,n)
peso.carteira.Rob = matrix( ,m,n)
retorno.Rob = matrix( ,m,1)

```



```

#-----
# condições iniciais:

# retorno medio da carteira:
mu.target = 0.01

# condicoes de contorno:
cLO = c(mu.target, 1)
cUP = c(Inf, 1)

# restricoes:
#bLO = rep(0, n)           # nao permite venda a descoberto
bLO = rep(-Inf, n)         # permite venda a descoberto

bUP = rep(1, n)

# -----
# definição dos pesos:

i = hor

while(i < m){

  # define o periodo da amostra - janela movel:
  Amostra = Sm1[(i-hor+1):i, 1:n]

  # calcula os pesos da carteira para o periodo amostrado:
  CovR = covRob(Amostra, estim = "M")$cov      # matriz de variancia e covariancia
  muRob = apply(Amostra, 2, location.m)         # media dos retornos

  # parametros do solver:
  ARob = rbind(muRob, 1)

  # resolucao:
  solutionRob = solveQP (objQ = CovR, , ARob, cLO, cUP, bLO, bUP,,)

  # guarda os pesos das carteiras no vetor de pesos:
  peso.carteira.Rob[i, 1:n] = solutionRob$variable$x$current

  # calcula o retorno diario fora da amostra (retorno absoluto):
  retorno.Rob[i,1] = t(peso.carteira.Rob[i, 1:n])%*%Sm1[(i+1), 1:n]

  i = i + 1
}

#-----

```

```

# calcula o turnover da carteira:

i = hor + 1
inicio = i-1
turnover.Rob = 0

while(i < m){
  wanterior = peso.carteira.Rob[i-1, 1:n]*Sm1[i, 1:n]
  wfinal = peso.carteira.Rob[i, 1:n]
  turnover.Rob = turnover.Rob + sum(abs(wfinal - wanterior))
  i = i + 1
}
turnover.Rob = turnover.Rob/(m - inicio - 1)

#-----
# calcula o retorno medio da carteira:
media.retorno.Rob = sum(retorno.Rob[inicio:(m-2), 1])/(m - inicio - 2)

```

Calcula o Excesso de Retorno, a Variância do Excesso de Retorno e Testa a Significância da Diferença entre os Excessos de Retornos das Estratégias Clássica e Robusta:

```

module(nuopt)
library(robust)

#-----
# Faz teste de comparacao do indice de Sharpe das carteiras:

#-----
# definições:

m = nrow(Sm1)          # estados da natureza
n = ncol(Sm1)          # numero de ativos

hor = 126 # tamanho da amostra da janela movel

#-----
# calcula retorno acima da taxa livre de risco:
retornolivre = matrix(,m,1)
retornolivre.Rob = matrix(,m,1)
i = hor

while(i < m){
  retornolivre[i+1] = (retorno[i,1] - CDIdia[i+1,1])
  retornolivre.Rob[i+1] = (retorno.Rob[i,1] - CDIdia[i+1,1])
}

```

```

    i = i + 1
}

# matriz de retornos acima da taxa de juros livre de risco:
inicio = hor+1
rlivre = matrix(,m-inicio-1,2)

i = 1
while(i < m-inicio){
  rlivre[i,1] = retornolivre[i+inicio]*100
  rlivre[i,2] = retornolivre.Rob[i+inicio]*100
  i = i + 1
}

Covrlivre = var(rlivre)          # matriz de variancia e covariancia
murlivre = apply(rlivre, 2, mean) # media dos retornos
murlivre = as.matrix(murlivre)

# diferença transformada do indice de Sharpe:
Shin = (Covrlivre[2,2]*murlivre[1,1]) - (Covrlivre[1,1]*murlivre[2,1])

Tam = nrow(rlivre) # tamanho da amostra
a = 2*(Covrlivre[1,1]^2)*(Covrlivre[2,2]^2)
b = 2*Covrlivre[1,1]*Covrlivre[2,2]*Covrlivre[1,2]
c = (1/2) * ((murlivre[1,1]^2) * (Covrlivre[2,2]^2))
d = (1/2) * ((murlivre[2,1]^2) * (Covrlivre[1,1]^2))
e =
  ((murlivre[1,1]*murlivre[2,1])/(2*Covrlivre[1,1]*Covrlivre[2,2]))*(Covrlivre[1,2]
  ]^2 + ((Covrlivre[1,1]^2)*(Covrlivre[2,2]^2)))

Teta = (1/Tam)*(a-b+c+d-e)

ZShin = Shin / sqrt(Teta)
murlivre
Covrlivre
pnorm(ZShin)

```